ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur,
de la Formation des Cadres et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun
École Mohammadia d'Ingénieurs
EMI

Concours National Commun d'admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou assimilées Session 2006

ÉPREUVE DE PHYSIQUE I

Filière **TSI**

Durée 4 heures

Cette épreuve comporte 8 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit.

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Dans les applications numériques, qui ne doivent pas être négligées, une attention particulière sera prêtée au nombre de chiffres à utiliser pour afficher les résultats. Ce nombre, qui dépend en général du niveau de précision recherché, ne doit en aucun cas dépasser le nombre de chiffres significatifs permis par les données. La valeur numérique de toute grandeur physique doit être accompagnée de son unité dans le système international des unités (SI).

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Premier problème
Thermodynamique

On dispose d'un réservoir $\mathcal{R}$ de température constante de grande capacité, contenant un gaz diatomique G, sous une pression $P_R = 25\times10^5$ Pa et une température $T_0 = 300$ K constantes.

On admettra dans la suite que le volume de ce réservoir est tel que l'on pourra l'assimiler à un générateur de gaz comprimé parfait. C'est-à-dire que la pression dans le réservoir $\mathcal{R}$ est indépendante de la quantité de gaz qui peut en sortir.

On admettra de plus dans tout le problème que G est un gaz parfait diatomique rigide de masse molaire $M = 28\times10^{-3}$ kg.mol^{-1}. On prendra pour valeur de la constante des gaz parfaits $R = 8,31$ J.K^{-1}.mol^{-1}.

1$^{\text{ère}}$ partie
Étude d'un réservoir à gaz

Un cylindre indéformable $\mathcal{C}$ isolé thermiquement de l'extérieur est séparé, à l'aide d'un piston Π à parois athermanes, en deux compartiments $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, de volumes respectifs V_1 et V_2. Le piston Π, de masse négligeable, peut glisser sans frottement tout en restant perpendiculaire à l'axe Δ du cylindre $\mathcal{C}$ (figure 1).

$\mathcal{C}_1$ peut être mis en communication avec le réservoir $\mathcal{R}$ par l'intermédiaire d'une vanne $\mathcal{V}_1$ et avec $\mathcal{C}_2$ par l'intermédiaire d'une vanne $\mathcal{V}_{12}$.

$\mathcal{C}_2$ peut être mis en communication avec un autre réservoir $\mathcal{R}_0$ au moyen d'une vanne $\mathcal{V}_2$.

On négligera systématiquement tout transfert thermique à travers une vanne fermée.

1.1. On note γ le rapport des capacités calorifiques à pression et à volume constant et on donne, pour les gaz diatomiques rigides, $\gamma = \frac{7}{5}$.

1.1.1. Donner un exemple de gaz diatomique.

1.1.2. Exprimer les capacités calorifiques molaires à volume constant c_v et à pression constante c_p pour un gaz parfait diatomique rigide en fonction de γ et R. Application numérique.

1.2. Le piston Π est bloqué. Le compartiment $\mathcal{C}_1$ de volume $V_1 = 10$ L constant contient le gaz G à la température $T_0 = 300$ K et sous la pression $P_0 = 1\times10^5$ Pa. Les vannes $\mathcal{V}_{12}$ et $\mathcal{V}_2$ étant fermées, on ouvre *brutalement* la vanne $\mathcal{V}_1$ afin de remplir le compartiment $\mathcal{C}_1$ avec le gaz G.

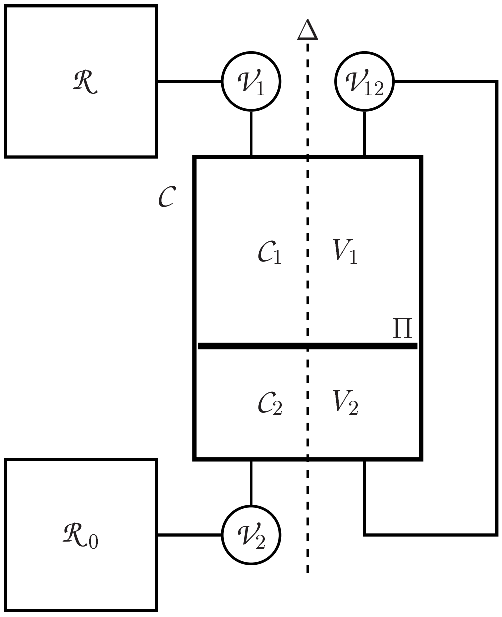

Figure 1: Réservoirs reliés à un cylindre à piston.

1.2.1. Exprimer la quantité de matière N_1 du gaz contenu initialement dans le compartiment $\mathcal{C}_1$ en fonction des données du problème. Application numérique.

1.2.2. Que vaut la pression P_1 dans le compartiment $\mathcal{C}_1$ à la fin de l'opération ?

1.2.3. Exprimer de même la quantité de matière N du gaz qui passe du réservoir $\mathcal{R}$ dans le compartiment $\mathcal{C}_1$ en fonction de R, P_0, P_R, V_1, T_0 et de la température T_1du gaz contenu dans $\mathcal{C}_1$ à la fin de l'opération.

On considère comme système le gaz contenu initialement dans $\mathcal{C}_1$ (quantité de matière N_1) et le gaz qui passe de $\mathcal{R}$à $\mathcal{C}_1$ (quantité de matière N).

1.2.4. Exprimer la variation ΔU de l'énergie interne du système en fonction de N, N_1, T_0, T_1, γ et R.

1.2.5. Exprimer le travail W reçu par le système en fonction de la pression P_R et du volume V_N qu'occupait la quantité de matière N du gaz dans le réservoir $\mathcal{R}$.

1.2.6. En déduire la température finale T_1 du gaz. Pour cela on pourra appliquer le premier principe de la thermodynamique après avoir montré que la transformation peut être considérée comme adiabatique. On exprimera T_1 en fonction de P_R, P_0, T_0 et γ. Application numérique.

1.3. Le piston Π étant toujours bloqué et le compartiment $\mathcal{C}_2$ parfaitement vide, on ferme la vanne $\mathcal{V}_1$ puis on ouvre la vanne $\mathcal{V}_{12}$. La tuyauterie est thermiquement isolée de l'extérieur, mais permet l'échange thermique entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ quand $\mathcal{V}_{12}$ est ouverte. On donne $V_1 = 10$ L et $V_2 = 2,0$ L. Soit T_2 la température du gaz lorsque l'équilibre est atteint.

1.3.1. Comment appelle-t-on une telle transformation ?

1.3.2. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, montrer que $T_2 = T_1$.

1.3.3. La transformation du gaz est-elle réversible ? Déterminer l'expression de la variation d'entropie ΔS en fonction de P_R, V_1, V_2 et T_1. On justifiera soigneusement la méthode utilisée.

Commenter le résultat obtenu.

1.3.4. Calculer numériquement ΔS et commenter le résultat obtenu. On donne $\ln \frac{6}{5} \approx 0,18$.

1.3.5. L'état final du système dépend-il de l'ordre de fermeture et d'ouverture des vannes $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_{12}$? Expliquer brièvement.

1.4. Le piston Π étant bloqué et la vanne $\mathcal{V}_{12}$ fermée, le compartiment $\mathcal{C}_1$ de volume $V_1 = 10$ L est rempli à l'aide du réservoir $\mathcal{R}$. La température du gaz contenu dans $\mathcal{C}_1$ est alors $T_0 = 300$ K.

Le compartiment $\mathcal{C}_2$ est rempli à l'aide d'un réservoir $\mathcal{R}_0$ contenant un gaz parfait G_0 à la pression $P = \frac{P_R}{x}$. On donne $c_{v_0} = 3\,R$ la capacité calorifique molaire à volume constant de G_0 et on note γ_0 son rapport de capacités calorifiques à pression constante et à volume constant.

Dans l'état initial, la température du gaz G_0 contenu dans $\mathcal{C}_2$ est $T_0 = 300$ K et on note le volume V_2^i du compartiment $\mathcal{C}_2$ sous la forme $V_2^i = V_0\,x$ où $V_0 = 0,1$ L et $x = \frac{P_R}{P}$ est un paramètre réel pouvant varier de 0 à x_{max}.

Les vannes $\mathcal{V}_{12}$ et $\mathcal{V}_2$ restant fermées, la vanne $\mathcal{V}_1$ est à nouveau ouverte. On débloque le piston Π et on le bloque à nouveau dès que la pression est la même dans les deux compartiments.

1.4.1. Déterminer la quantité de matière n_2 du gaz G_0 dans le compartiment $\mathcal{C}_2$ en fonction de P_R, V_0 et T_0.

1.4.2. Donner l'expression du volume V_2 occupé par le gaz de $\mathcal{C}_2$ dans l'état final en fonction de sa température T ainsi que de T_0 et V_0.

1.4.3. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, montrer que la température $T(x)$ du gaz G_0 contenu dans $\mathcal{C}_2$ est donnée par :

$$T(x) = \frac{3+x}{4}\,T_0$$

1.4.4. En déduire l'expression de V_2 en fonction de V_0 et x.

1.4.5. Déterminer la variation d'entropie ΔS du gaz G_0 contenu dans $\mathcal{C}_2$ en fonction de P_R, V_0, T_0 et x.

1.4.6. Applications numériques

1.4.6.1. Calculer numériquement T et ΔS pour $x = 25$. On donne $\ln 2 \approx 0,69$ et $\ln 3 \approx 1,1$.

1.4.6.2. Déterminer la valeur numérique de ΔS pour $x = 1$ et pour x tendant vers zéro.

1.4.6.3. Déterminer x_{max} ainsi que la valeur numérique de ΔS lorsque $x = x_{\text{max}}$. On donne $\ln 7450 \approx 8,92$.

1.4.7. Représenter ΔS en fonction de x et commenter le graphique obtenu.

2ème partie
Étude d'un moteur à piston

Un moteur à piston est constitué d'un cylindre calorifugé de volume $V_A = 0,8$ L, muni de deux soupapes S_1 et S_2 et d'un piston Π athermane pouvant glisser sans frottement le long de l'axe du cylindre (figure 2). Le cylindre est relié à l'aide de la soupape S_1 au réservoir à gaz $\mathcal{R}$ étudié en 1, rempli du gaz parfait G.

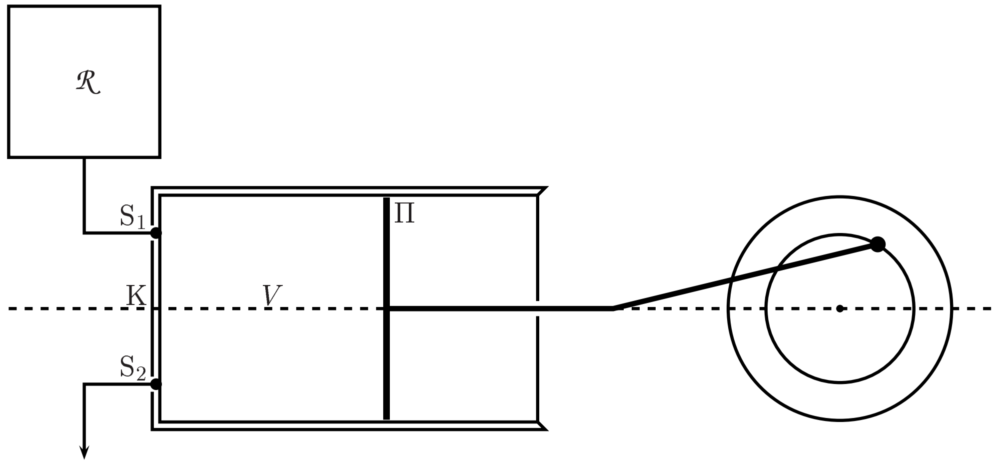

Figure 2: Moteur à piston.

2.1. Initialement le piston est placé contre la culasse K et le volume de gaz enfermé dans le cylindre est nul. La soupape S_2 étant fermée, on ouvre la soupape S_1 pour mettre le cylindre en communication avec le réservoir $\mathcal{R}$. Le piston se déplace alors vers la droite jusqu'à ce que le volume V du gaz enfermé dans le cylindre soit égal à $\frac{V_A}{\alpha}$. Pour les applications numériques, on prendra $\alpha = 5$.

2.1.1. Que vaut la pression à l'intérieur du cylindre à la fin de cette première étape ? Comment appelle-t-on une telle transformation ?

2.1.2. Exprimer la quantité de matière n_0 admise dans le cylindre à la fin de cette étape en fonction de P_R, V_A, α et de la température T_1 du gaz dans le cylindre.

2.1.3. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, exprimer T_1 en fonction de T_0.

2.1.4. Calculer numériquement n_0.

2.2. À la fin de la première étape, alors que la soupape S_2 est toujours fermée, la soupape S_1 se ferme et le gaz enfermé subit une détente adiabatique, que l'on suppose réversible, jusqu'à ce que le volume du cylindre soit égal à V_A.

2.2.1. Exprimer la pression P_2 dans le cylindre à la fin de cette deuxième étape en fonction P_R, γ et α. Application numérique. On donne $5^{7/5} \approx 9,52$.

2.2.2. Exprimer le travail W_2 reçu par le gaz au cours de cette étape en fonction de P_R, V_A, γ et α.

2.3. À la fin de la deuxième étape, la soupape S_2 s'ouvre mettant le gaz contenu dans le cylindre en communication avec l'extérieur où la pression est $P_0 = 1 \times 10^5$ Pa. Le piston reste d'abord immobile ($V = V_A$) tant que la pression $P \geqslant P_0$, ensuite il est ramené vers la culasse jusqu'à $V = 0$. Un nouveau cycle peut alors commencer.

2.3.1. Tracer l'allure du diagramme de Watt donnant la pression P du gaz, en ordonnée, en fonction du volume V qu'il occupe. Indiquer les points remarquables et préciser le sens de parcours du cycle.

2.3.2. Déterminer l'expression du travail W_0 fourni au gaz par le piston au cours d'un cycle en fonction de P_0, P_R, V_A, γ et α. Application numérique.

2.3.3. Quel doit être, en régime stationnaire, le débit massique D_1 du gaz pour que la puissance mécanique du moteur soit $\mathcal{P} = 1$ kW ? On donnera l'expression littérale de D_1 en fonction de $\mathcal{P}$, W_0, P_R, V_A, T_0, M, R, γ et α et on calculera numériquement D_1 en kg/h.

2.3.3.1. Calculer numériquement la durée Δt d'un cycle dans ces conditions.

3ème partie
Étude d'un moteur à turbine

Un moteur à turbine (figure 3) est constitué d'une tuyère τ calorifugée, au milieu de laquelle se trouve une turbine $\mathcal{T}$. Le gaz G du réservoir $\mathcal{R}$ de la partie 1, est injecté à l'entrée de la tuyère. Il actionne la turbine puis sort dans l'atmosphère, à la pression P_0 avec une vitesse négligeable. On s'intéresse au régime de fonctionnement stationnaire.

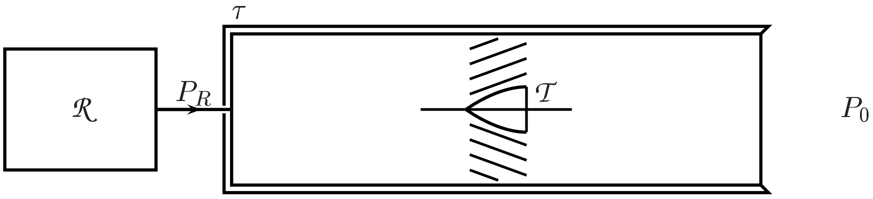

Figure 3: Moteur à turbine.

3.1. On suppose que le gaz G subit une détente adiabatique réversible. Soit W_T le travail fourni à une mole de gaz par la turbine.

3.1.1. Rappeler l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert.

3.1.2. En déduire que, dans le cas du modèle de moteur à turbine étudié, le travail W_T est simplement relié à la variation d'enthalpie molaire du gaz entre l'entrée et la sortie de la tuyère.

3.1.3. En déduire l'expression de W_T en fonction de T_0, P_0, P_R, γ et R. Application numérique. Préciser le signe de W_T et commenter le résultat obtenu. On donne $5^{4/7} \approx 2,51$.

3.1.4. Quel doit être le débit massique D_2 pour que la turbine ait une puissance $\mathcal{P} = 1$ kW ? On exprimera D_2 en fonction de $\mathcal{P}$, W_T et la masse molaire M du gaz G. Application numérique.

3.2. Pour tenir compte des irréversibilités, on admet que lors de la détente adiabatique, la pression P et le volume V sont reliés par la loi polytropique :

$$P\,V^k = \text{constante} \qquad \text{avec} \qquad k = 1,16$$

3.2.1. Déterminer, dans ces conditions, le travail W'_T fourni à une mole de gaz par la turbine. Application numérique. On donne $5^{8/29} \approx 1,56$.

3.2.2. Quel est le débit massique correspondant D'_2 assurant une puissance $\mathcal{P} = 1$ kW de la turbine ?

4$^{\text{ème}}$ partie
Étude d'un moteur à réaction

On utilise le réservoir $\mathcal{R}$ pour faire fonctionner un moteur à réaction. Le gaz G est envoyé dans une tuyère calorifugée τ à la sortie de laquelle règne la pression $P_0 = 1 \times 10^5$ Pa et où la vitesse du gaz n'est plus négligeable (figure 4). On s'intéresse au régime de fonctionnement stationnaire et on néglige la vitesse du gaz à la sortie du réservoir.

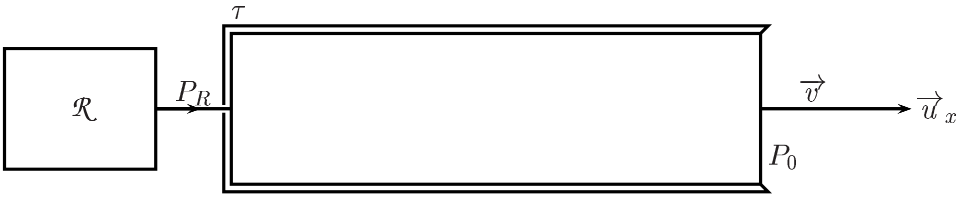

Figure 4: Moteur à réaction.

Pour tenir compte des irréversibilités, on admet la loi d'évolution polytropique :

$$P\,V^{k'} = \text{constante} \qquad \text{avec} \qquad k' = 1,04$$

4.1. En appliquant le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert, exprimer la vitesse v d'éjection des gaz en fonction de M, γ, R, T_0, P_0, P_R et k'. Application numérique. On donne $5^{1/13} \approx 1,13$.

4.2. Quel est le débit massique D_3 du gaz permettant d'avoir une puissance cinétique d'éjection $\mathcal{P} = 1$ kW ?

Deuxième problème
Mécanique

On considère le système mécanique représenté figure 1. AB est une barre homogène de masse m et de longueur $2\,\ell$. L'extrémité A de la barre est assujetie à se déplacer, sans frottement, le long de l'axe matérialisé par Oy. On note G le centre d'inertie de la barre repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y). L'orientation de la barre dans le plan xOy est repérée par l'angle θ qu'elle fait avec la verticale. Le champ de pesanteur est uniforme et donné par :

$$\vec{g} = g\,\vec{u}_x$$

En plus de son poids, la barre est soumise à l'action d'une force de rappel appliquée au point A et schématisée par un ressort de raideur k et de longueur ℓ_0 à vide. Au passage de l'extrémité A de la barre par l'origine O ($y_A = 0$), la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide ℓ_0.

On s'intéresse aux mouvements d'oscillation de la barre AB dans le plan xOy. Toute l'étude sera menée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

On donne le moment d'inertie J de la barre AB par rapport à un axe Δ perpendiculaire à la barre et passant par son centre d'inertie G :

$$J = \frac{m\,\ell^2}{3}$$

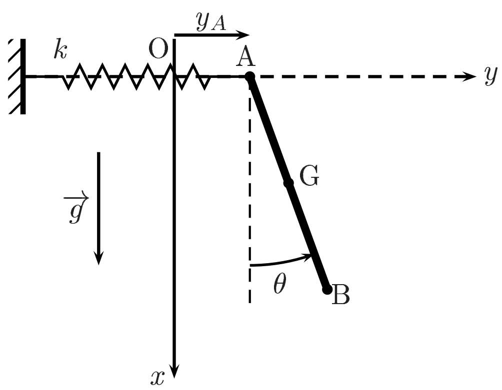

Figure 1: Système mécanique.

1ère partie
Mise en équation

1.1.

1.1.1. Exprimer x en fonction de ℓ et θ.

1.1.2. Exprimer de même la coordonnée y_A donnant la position de l'extrémité A de la barre, $y_A = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{u}_y$, en fonction de y, ℓ et θ.

1.2. On se propose de déterminer les équations du mouvement de la barre.

1.2.1. Faire le bilan des efforts exercés sur la barre en mouvement et représenter schématiquement leurs résultantes sur une figure.

1.2.2. Écrire le théorème de la résultante cinétique (TRC) appliqué à la barre AB.

1.2.3. En déduire l'expression de la réaction $\overrightarrow{R}$ de l'axe Oy en fonction de m, g, ℓ, θ, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ ainsi qu'une équation du mouvement reliant y, $\ddot{y}$ et θ. On posera :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.2.4. Écrire le théorème du moment cinétique (TMC) en G.

1.2.5. En déduire, à l'aide d'une projection convenable, une deuxième équation du mouvement de la barre reliant θ, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ et y. On posera :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3\,g}{\ell}}$$

2ème partie
Étude des petites oscillations de la barre

On s'intéresse aux petits mouvements de la barre AB. Dans ce cas, y et θ ainsi que *toutes* leurs dérivées temporelles sont supposés être des infiniment petits de premier ordre.

2.1. En linéarisant les équations du mouvement obtenues précédemment, montrer que, dans ce cas, le mouvement général de la barre est décrit par :

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega_1^2\, y = \omega_1^2\, z \\ \ddot{z} + (3\,\omega_1^2 + \omega_2^2)\, z = 3\,\omega_1^2\, y \end{cases}$$

où l'on a posé $z = \ell\,\theta$.

2.2. On cherche les modes propres d'oscillation de la barre sous la forme, en notation complexe :

$$\begin{cases} \underline{y} = \underline{A}\exp \mathrm{i}\,\Omega\, t \\ \underline{z} = \underline{B}\exp \mathrm{i}\,\Omega\, t \end{cases}$$

où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$. $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont deux constantes complexes.

2.2.1. Montrer que $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont solutions du système linéaire homogène suivant :

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \Omega^2)\,\underline{A} - \omega_1^2\,\underline{B} = 0 \\ -3\,\omega_1^2\,\underline{A} + (3\,\omega_1^2 + \omega_2^2 - \Omega^2)\,\underline{B} = 0 \end{cases}$$

2.2.2. À quelle condition ce système admet-il des solutions non identiquement nulles ?

2.2.3. En déduire que Ω est solution de l'équation :

$$\Omega^4 - (4\,\omega_1^2 + \omega_2^2)\,\Omega^2 + \omega_1^2\,\omega_2^2 = 0$$

2.2.4. Montrer alors que, dans le cadre des petites oscillations, le mouvement libre le plus général est donné par :

$$\begin{cases} \underline{y} = \underline{A}_1\exp \mathrm{i}\,\Omega_1\, t + \underline{A}_2\exp \mathrm{i}\,\Omega_2\, t \\ \underline{z} = \underline{B}_1\exp \mathrm{i}\,\Omega_1\, t + \underline{B}_2\exp \mathrm{i}\,\Omega_2\, t \end{cases}$$

et donner les expressions de Ω_1 et Ω_2 en fonction de ω_1 et ω_2. On prendra $\Omega_1 > \Omega_2$. Comment détermine-t-on $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$, $\underline{B}_1$ et $\underline{B}_2$?

2.3. Initialement ($t = 0$), l'extrémité A étant au repos en O, on écarte la barre AB d'un angle $\theta_0 > 0$ très faible par rapport à la verticale et on la lâche sans vitesse initiale.

2.3.1. Déterminer les constantes $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$, $\underline{B}_1$ et $\underline{B}_2$.

2.3.2. Que vaut $y(t)$? Commenter.

2.3.3. En déduire l'expression de $\theta(t)$ en fonction de Ω_1, Ω_2, θ_0 et t. L'expression obtenue semble-t-elle en accord avec le résultat de la question 2.3.2. ? Expliquer.

FIN DE L'ÉPREUVE